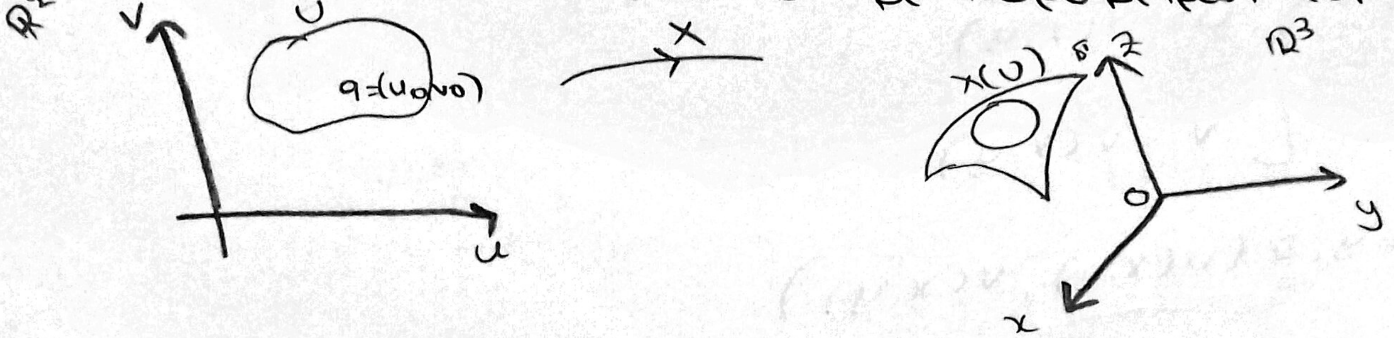
Διάλεξη 11η

19/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

▶ Έστω S κανονική επιφάνεια και $X: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S$ σύστημα συντ/νων της S με παραμέτρους (u,v)



$X_u \times X_v \neq 0$, $\quad X(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$

Θεωρώ σημείο $P = X(q) = X(u_0,v_0)$. Επειδή X είναι σύστημα συντεταγμένων μία από τις Ιακωβιανές

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0), \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0), \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)$$

Είναι $\neq 0$. Υποθέτω ότι $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$

$\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \equiv Oxy$, $\quad \pi(x,y,z) = (x,y,0) = (x,y)$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q)$ = Ιακωβιανή ορίζουσα του $\pi \circ X$.

Για $\pi \circ X: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Εφαρμόζεται το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης δηλαδή υπάρχει περιοχή $W \subset \mathbb{R}^2$ του $\pi \circ X(q)$ τ.ω.: $\pi \circ X|_{U_0}: U_0 \to W$ διαφ/μη

$F = \Pi \circ X$

$F(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) = (x,y)$

$F(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow (u,v) = F^{-1}(x,y)$

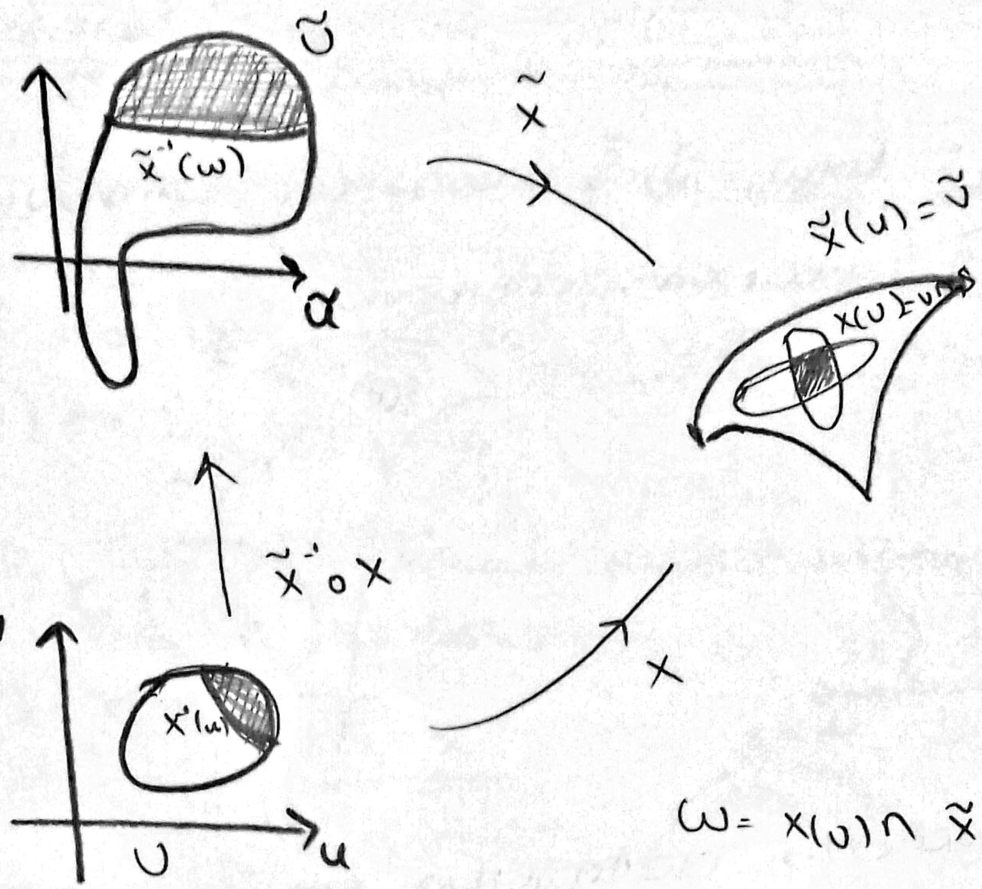
$\Leftrightarrow \begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$

$(x,y,z) = \underbrace{(u(x,y), v(x,y))}_{u(x,y)}$

Αν υποθέσω ότι η απεικόνιση είναι λεία και οτ X : "1-1" τότε $(X|_{U_0})^{-1} = (\Pi \circ X)^{-1} \circ \Pi$

Άρα αποδείξαμε την παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση:</u> Αν S είναι κανονική επιφάνεια και $X: U \to X(U) \subset S$ λεία απεικόνιση με τις ιδιότητες i) είναι 1-1 και ii) Το διαφορικό της X είναι 1-1 και $\forall q \in U$, τότε η X είναι ομοιομορφισμός.



$\omega = x(U)\cap\tilde{x}(\tilde{U})$

$= $ ανοιχτό στο S.

Λήμμα: Η απεικόνιση $\tilde{x}^{-1}\circ x : x^{-1}(\omega) \to \tilde{x}^{-1}(\omega)$ είναι λείο

Απόδ.

$$\tilde{x}^{-1}\circ x = (\pi\circ\tilde{x})^{-1}\circ(\pi\circ x)$$

Ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια και $f: S\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση

(i) Η f καλείται διαφορίσιμη στο σημείο $p\in S$ αν $\exists$ για σύστημα συντεταγμένων $x: U\to x(U)$ με $p\in x(U)$ η $f\circ x: U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $x^{-1}(p)$

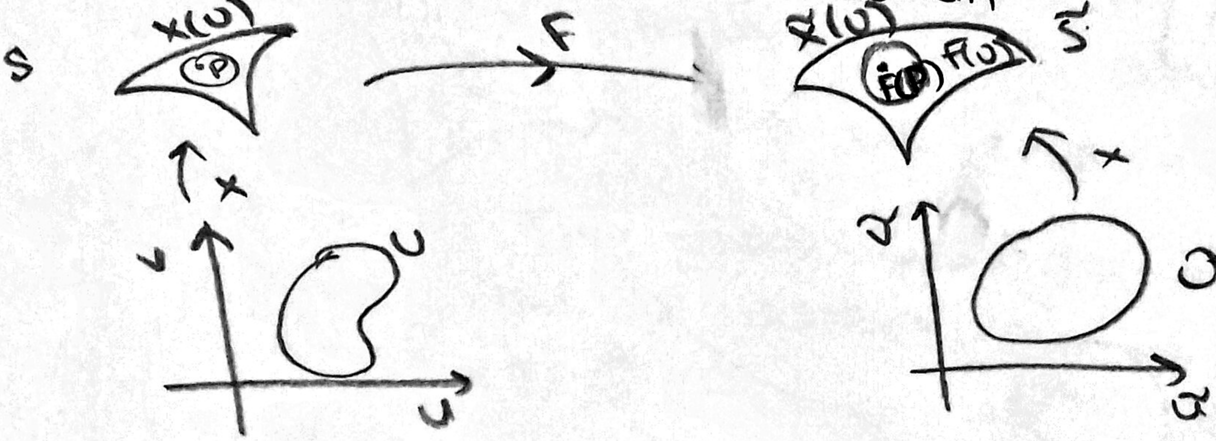
(ii) Η f καλείται διαφορίσιμη αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε $p\in S$

Είναι καλά ορισμένη : $f\circ x$: $f\circ\tilde{x}$

$$f\circ\tilde{x} = \underbrace{(f\circ x)}_{\text{διαφ}}\circ\underbrace{(x^{-1}\circ\tilde{x})}_{\text{διαφ}}$$

Διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ κανονικών επιφ.

Ορισμός: Έστω $S, \tilde{S}$ κανονικές επιφάνειες και $F: S \to \tilde{S}$ συνεχής απεικόνιση



(i) Η F καλείται διαφορίσιμη στο $p \in S$ αν για συστήματα συντεταγμένων $x: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$

και $\tilde{x}: \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \tilde{S}$ με $p \in x(U)$, $F(p) \in \tilde{x}(\tilde{U})$

και $F(x(U)) \subset \tilde{x}(\tilde{U})$ η απεικόνιση $\tilde{x}^{-1} \circ A \circ x\, U \subset \mathbb{R}^2 \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$

είναι διαφορίσιμη στο $x^{-1}(p)$.

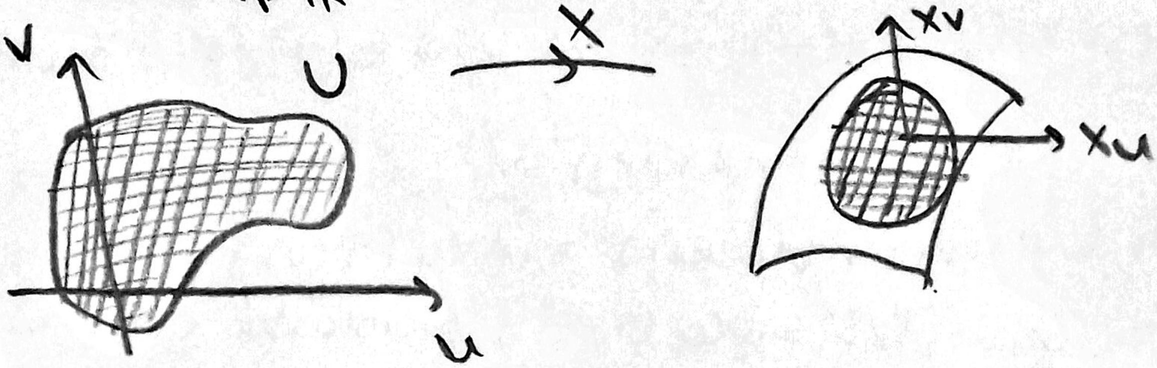
$x_1 : U_1 \to S$, $\tilde{x}_1 : \tilde{U}_1 \to \tilde{S}$

$\tilde{x}_1^{-1} \circ F \circ x_1 = (\tilde{x}_1 \circ \tilde{x}) \circ (\tilde{x}^{-1} \circ F \circ x) \circ (x^{-1} \circ x)$

Εφαπτόμενα διανύσματα - Εφαπτ. επίπεδο κανονικής επιφ:

Ορισμός: Έστω S κανονική επιφάνεια και $p \in S$ και διάνυσμα $w \in T_p\mathbb{R}^3$ καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο σημείο p αν-ν υπάρχει λεία καμπύλη $c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$, $\varepsilon>0$ τ.ω $c(0)=p$, $c'(0)=w$

Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων της S στο σημείο της p συμβολίζεται με T_pS και $T_pS \subset T_p\mathbb{R}^2$.



$X(u, v=v_0)$: παραμετρ. καμπ. $u=u_0$

$X(u=u_0, v)$ » » $u=u_0$

X_u, X_v είναι εφαπτ. διανύσματα.

Πρόταση: Έστω $X: U \to S$ σύστημα συν/νων της S με $p = X(q) \in X(U)$. Τότε ισχύει $T_pS = dX_q(T_q\mathbb{R}^2)$

Συνέπεια: Το σύνολο T_pS είναι διαν. υπόχωρος του $T_p\mathbb{R}^3$ διάστασης 2.

Απόδ

Αποδ

$w \in T_pS \Rightarrow \exists\, c:(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ με $c(0)=p$, $c'(0)=w$

Μπορώ να υποθέσω για αρκετά μικρό $\varepsilon>0$ ότι

$c(-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq x(U)$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$

$\Rightarrow c(t) = x\big(u(t),v(t)\big) = x \circ B(t)$, $B:(-\varepsilon,\varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^2$

$B(t) = \big(u(t),v(t)\big)$

$c(0)=p \Leftrightarrow x(B(0)) = x(q) \Leftrightarrow B(0)=q \Leftrightarrow (u(0),v(0))=q$

$$w = c'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 x(u(t),v(t)) = u'(0)\, x_u(u(0),v(0)) +$$

$$u'(0)\cdot x_v(u(0),v(0)) \Rightarrow w = u'(0)x_u(q) + v'(0)x_v(q) \Leftrightarrow$$

$w = u'(0)\,dx_q(e_1) + v'(0)\,dx_q(e_2) \Rightarrow$

$w = dx_q\big(u'(0)e_1 + v'(0)e_2\big) = dx_q(B'(0))$

Άρα ισχύει ότι $T_pS \subseteq dx_q(T_q\mathbb{R}^2)$ Αντίστροφα έστω $w \in$

$w \in dx_q(T_q\mathbb{R}^2)$. $w = dx_q(w_0)$, $w_0 \in T_q\mathbb{R}^2$.

Θεωρώ καμπύλη $B:(-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ ώστε $B(0)=q$, $B'(0)=w_0$

$w = dx_q(w_0) = dx_q(B'(0)) = (x \circ B)'(0)$

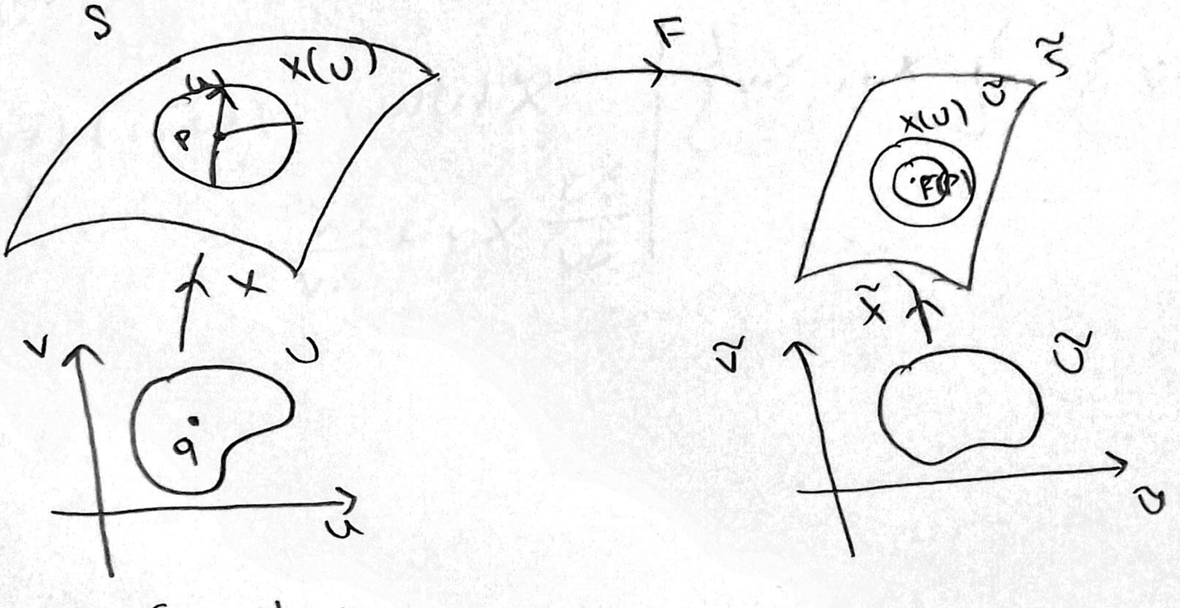
Θέτω $c = x\circ B : (-\varepsilon,\varepsilon) \to x(U)$, $c(0) = x(B(0)) = x(q) = p$

$w = c'(0) \Rightarrow w \in T_pS$

Ορισμός: Έστω $F: S \to \tilde{S}$ διαφ. απεικόνιση μεταξύ κανονικών επιφανειών $S, \tilde{S}$. Καλούμε διαφορικό της F στο σημείο p, την απεικόνιση $dF_p : T_pS \to T_{F(p)}\tilde{S}$ η οποία στο τυχαίο $w \in T_pS$ αντιστοιχεί το διάνυσμα $dF_p(w) \in T_{F(p)}\tilde{S}$ ως εξής:

Θεωρώ $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με $c(0) = p$ και $c'(0) = w$ και ορίζω $dF_p(w) = \tilde{c}'(0)$, όπου $\tilde{c} = F \circ c : (\varepsilon, -\varepsilon) \to \tilde{S}$

$$\tilde{c}(0) = F(c(0)) = F(p).$$



$q = x^{-1}(p)$

Θεωρώ συστήματα συντεταγμένων $x, \tilde{x}$ τ.ω. $S, \tilde{S}$ γύρω από τα σημεία $p, \tilde{p}$ τότε $F(x(U)) \subseteq \tilde{x}(\tilde{U})$

$$c(t) = x(u(t), v(t))$$

$$\tilde{c}(t) = F \circ c(t) = F \circ x(u(t), v(t)) = \tilde{x}(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$$

8

$$(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \underbrace{\tilde{X}^{-1} \circ F \circ X}_{\phi}(u(t), v(t))$$

$$(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \phi(u(t), v(t))$$

$$\phi(u,v) = (\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$$

$$w = c'(0) = u'(0)\, X_u(u(0), v(0)) + v'(0)\, X_v(u(0), v(0))$$

$$dF_p(w) = \tilde{c}\,'(0) = \tilde{u}'(0)\, \tilde{X}_{\tilde{u}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)) + \tilde{u}'(0)\, \tilde{X}_{\tilde{v}}(\tilde{u}(0), \tilde{v}(0$$

$$\phi = \tilde{X}^{-1} \circ F \circ X \Rightarrow \tilde{X} \circ \phi = F \circ X \Rightarrow \tilde{X}(\tilde{u}(u,v)) = F(X(u,v))$$

$$\{\tilde{X}_{\tilde{u}}, \tilde{X}_{\tilde{v}}\} \quad \{X_u, X_v\}$$

$$\tilde{X}(\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v)) = (F \circ X)(u,v)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial u} \tilde{X}_{\tilde{u}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial v} \cdots$$